

İdeal Teori Arasınov Soruları

- 1-) A1thalka ve ideal tanımlarını yapınız.
Arasındaki farkı daııklayınız, d1thalka olan fakat ideal olmayan bir örnek veriniz.
- 2-) R deęismeli bir halka, I , R 'nin ideali olsun. $\sqrt{I} = \{a \in R \mid a^n \in I, \text{uygun bir } n \in \mathbb{N} \text{ için}\}$ kümesi R 'nin bir ideali midir?
- 3- R bir halka $a, b, c \in R$ olsun.
 a, b ve c ile deęismeli ise $a, b+c$ ve $b.c$ ile de deęismelidir, gösteriniz.
- 4- a) R birimli sıfır bölensiz bir halka ise bütün idempotent elemanlarını bulunuz.
b) R Boole halkası olsun. $a, b \in R$ idempotent ise $a+b$ 'de idempotenttir, gösteriniz.

Cevap Anahtarı

1-) Bir R halkasının S altalkası, I ideali olsun. Tanımların ilk sikleri aynıdır. İkinci sik farkı yaratır. $\forall a, b \in S$ için $a \cdot b \in S$ olmalıdır. Oysa idealde $\forall r \in R, \forall a \in I$ için $ra, ar \in I$ olmalıdır. Yani her ideal bir altalka, fakat her altalka ideal değildir.

Ömek: $M_2(\mathbb{Z})$ halkası için

$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$ altkümesi altalka fakat ideal değildir.

2-) R bir değişmeli halka, I, R 'nin ideali için $\sqrt{I} = \{ a \in R \mid a^n \in I, \text{ uygun bir } n \in \mathbb{N} \text{ için} \}$

$\sqrt{I} \neq \emptyset$ asikör

* $\forall x, y \in \sqrt{I} \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}, x^m, y^n \in I$

$\Rightarrow (x-y)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i \binom{m+n}{i} x^{m+n-i} y^i$ Binom

açılımından $i \geq n$ ise $y^i \in I$, $i < n$ ise $m+n-i > m$ olup $x^{m+n-i} \in I \Rightarrow (x-y)^{m+n} \in I \Rightarrow x-y \in \sqrt{I}$

* $\forall x \in R, \forall y \in \sqrt{I}$ için $\exists n \in \mathbb{N}, y^n \in I$

$\Rightarrow (xy)^n = x^n y^n \in I \Rightarrow xy = yx \in \sqrt{I}$ bulunur.

3-) a, b ve c ile değişmeli ise $ab = ba$ ve $ac = ca$ dir. $\textcircled{2}$

$$a(b+c) = ab+ac = ba+ca = (b+c)a$$

$$a(bc) = (ab)c = (ba)c = b(ac) = b(ca) = (bc)a$$

4) a) $e \neq 0_R, e \neq 1_R$ idempotent olsun.

$$e^2 = e \Rightarrow e^2 - e = 0_R \quad e(e-1_R) = 0_R$$

$\Rightarrow e = 0_R \vee e = 1_R$ bulunur.

b) $\forall a, b \in R$ için $a^2 = a$ $b^2 = b$ dir.

Boole halkası değişmeli ve karakteristiđi 2 dir.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \\ = a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a + 2ab + b$$

$$= a+b // \text{ bulunur.}$$